1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	C	A	D	B	D	C	A	B	A	A

柳州市高级中学 2021 年秋季学期高二年级 9 月份月考

数学试卷

注意事项：

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内;
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填土, 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写;
3. 请按照题号顺序在答题卡的答题区域内作答, 超出答题区域的其他地方答案无效;
4. 作图可先试用铅笔画出，确定后必须用黑色签字笔描黑;
5. 保持卡面清洁、不要折叠、弄破, 不准使用修正带、涂改液、刮纸刀.

第一部分 选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每个小题给出的四个选项中, 只有一个人符合题目要求

1. 判断下列各组中的两个函数是同一函数的为 . . . . (C).

(1) $f(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{x+3}$, $g(x) = x - 5$;

(2) $f(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$;

(3) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

(4) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$

(A) (1)(2) (B) (2)(3) (C) (4) (D) (1)(3)

2. 设 x, y, z 为正数, 且 $2^x = 3^y = 5^z$, 则 . . . . (D).

(A) $2x < 3y < 5z$. (B) $5z < 2x < 3y$. (C) $3y < 5z < 2x$. (D) $3y < 2x < 5z$.

【答案解析：】x, y, z 为正数, 令 $2^x = 3^y = 5^z = k > 1$. $\lg k > 0$. 则 $x = \frac{\lg k}{\lg 2}, y = \frac{\lg k}{\lg 3}, z = \frac{\lg k}{\lg 5}$. $\therefore 3y = \frac{\lg k}{\lg \sqrt[3]{3}}, 2x = \frac{\lg k}{\lg \sqrt{2}}$, $5z = \frac{\lg k}{\lg \sqrt[5]{5}}$ $\because \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$, $\sqrt{2} = \sqrt[10]{32} > \sqrt[10]{25} = \sqrt[5]{5}$. $\therefore \lg \sqrt[3]{3} > \lg \sqrt{2} > \lg \sqrt[5]{5} > 0$. $\therefore 3y < 2x < 5z$. 故选: D.

3. 设 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, 且 $f(1+x) = f(-x)$. 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $f\left(\frac{5}{3}\right)$= . . . . (C).

(A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

【答案解析：】$f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(1 + \frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right)$, 而 $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(1 - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$, 故 $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

4. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tan 2\alpha = \frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$, 则 $\tan\alpha$ = ... (A).

(A) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

【答案解析：】$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$, $\therefore 2\sin\alpha(2-\sin\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\therefore 4\sin\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\therefore \sin\alpha = \frac{1}{4}$. 又 $\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ......(D).

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

6. 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取 1 个数，则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为 ....(B).

(A) $\frac{7}{9}$ (B) $\frac{23}{32}$ (C) $\frac{9}{32}$ (D) $\frac{2}{9}$

7. 已知曲线 $C_1: y=\cos x, C_2: y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$, 则下列结论正确的是 ....(D).

(A) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

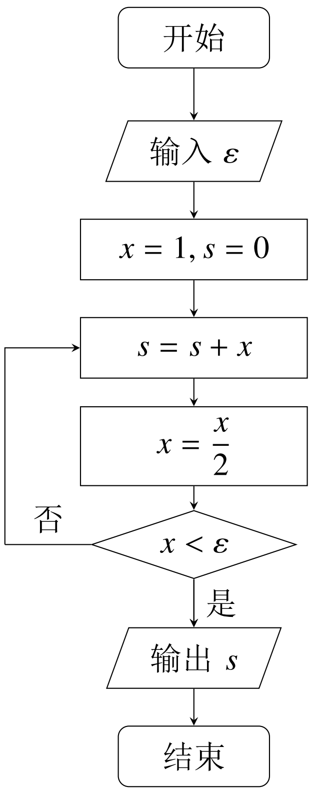
(B) 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单. 位长度, 得到曲线 C_2

(C) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

(D) 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

8. 执行如图所示的程序框图,如果输入的 $\varepsilon=0.01$, 则输出的 s 的值等于 ....(C).

(A) $2-\dfrac{1}{2^4}$. (B) $2-\dfrac{1}{2^5}$. (C) $2-\dfrac{1}{2^6}$. (D) $2-\dfrac{1}{2^7}$.

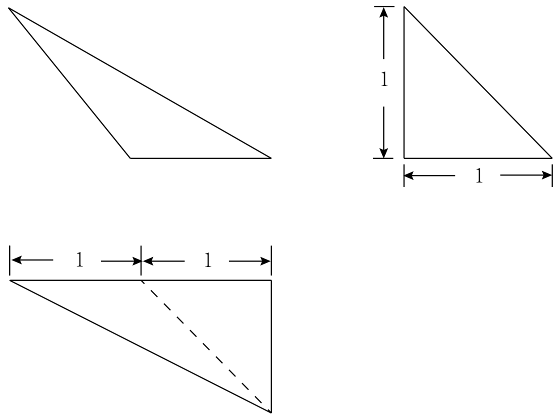


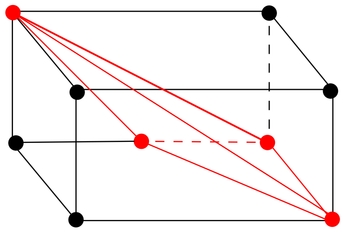
9. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为 ....(A)

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$
(D) 1





【答案解析：】

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 若 $a=\sqrt{3}, b=1, A=120^\circ$, 则此三角形解的情况为 ……………………………………………………………………………………(B)

(A) 无解　　(B) 只有一解　　(C) 有两解　　(D) 解个数不确定

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_n-a_{n+1}=2a_{n+1}\cdot a_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $a_5=$ ……………………………(A)

(A) $\frac{1}{9}$　　(B) 9　　(C) $\frac{1}{10}$　　(D) 10

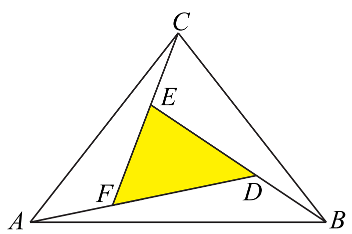
12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1a_3a_5=64, a_6=32$, 若 $2a_n\geq 8n+t$ 恒成立, 则实数 t 的最大值为 …(A)

(A) -16　　(B) 16　　(C) -20　　(D) 20

【答案解析：】因为 $a_1a_3a_5=a_3^3=64$, 所以 $a_3=4$, 又 $a_6=32$, 所以 $q^3=\frac{a_6}{a_3}=8$, 解得 $q=2$, 所以 $a_n=2^{n-1}$, 所以 $2a_n\geq 8n+t$ 恒成立等价于 $2^n-8n\geq t$ 恒成立, 令 $b_n=2^n-8n$, 则 $b_{n+1}-b_n=2^n-8$, 当 $n<3$ 时, $b_{n+1}-b_n<0$；当 $n=3$ 时, $b_4-b_3=0$ 当 $n>3$ 时, $b_{n+1}-b_n>0$, 所以 $b_1>b_2>b_3=b_4<b_5<b_6<\cdots$, 所以 $(b_n)_{\min}=b_3=b_4=-16$, 所以 $t\leq -16$, 即实数 t 的最大值为 -16, 故选：A.

第二部分　填空题: 本部分共 4 道小题, 每个小题 5 分, 共　20 分

13. 如图所示, $\triangle ABC$与$\triangle DEF$ 皆为等边三角形, 且 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}=3\overrightarrow{CE}$,　设 $AC=\sqrt{13}$, 求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=$ $\underline{\quad -\frac{9}{2}\quad}$.



14. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 面积为 $\sqrt{3}, B=60^\circ, a^2+c^2=3ac$, 则 $b=$ $\underline{2\sqrt{2}}$.

15. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10, a_2+a_4=5$, 则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为 $\underline{\quad 64 \quad}$.

16. α,β 是两个平面, m,n 是两条直线，有下列四个命题:

① 如果 $m\perp n, m\perp\alpha, n//\beta$, 那么 $\alpha\perp\beta$.

② 如果 $m\perp\alpha, n//\alpha$, 那么 $m\perp n$.;

③ 如果 $\alpha//\beta, m\subset\alpha$, 那么 $m//\beta$.

④ 如果 $m//n, \alpha//\beta$, 那么 m 与 α 所戌的角和 n 与 β 所成的角相等. 其中正确命题的序号有 ②③④(填写所有正确命题的编号).

第三部分 解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 考生根据要求作答

(一) 必考题 (共 58 分)

17. (本题满分 10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$.

(1) 求 $\sin B\sin C$;

(2) 若 $6\cos B\cos C=1, a=3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案解析：】由于 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2}{3\sin A}$，因此 $\frac{1}{2}c\sin B=\frac{a}{3\sin A}$，根据正弦定理得：$\frac{1}{2}\sin C\sin B=\frac{\sin A}{3\sin A}$，化简得 $\sin B\sin C=\frac{2}{3}$

由于 $\cos(B+C)=\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\frac{1}{2}$，因此 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$，然后根据面积关系 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2}{3\sin A}$ 得 $bc=8$，再根据余弦定理 $b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$ 得 $(b+c)^2-3bc=9$，所以 $b+c=\sqrt{33}$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{33}+3$

18. (本题满分 12 分)

$\triangle$ ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$a=2\sqrt{7}$，$b=2$.

(1) 求 c;

(2) 设 D 为 BC 边上一点，且 $AD\perp AC$, 求 $\triangle$ ABD 的面积 S.

【答案解析：】(1) 由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$ 得 $2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=0$, 即 $A+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in Z)$, 又 $A\in(0,\pi)$, $\therefore A+\frac{\pi}{3}=\pi$, 得 $A=\frac{2\pi}{3}$. 由余弦定理: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. 又 $\because a=2\sqrt{7}, b=2. \cos A=-\frac{1}{2}$ 代入并整理得 $(c+1)^2=25$,

(2) $\because AC=2, BC=2\sqrt{7}$ $AB=4$, 由余弦定理 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ $\because AC\perp AD$, 即 $\triangle ADC$ 为直角三角形, 则 $AC=DC\cdot\cos C$, 得 $CD=\sqrt{7}$ 由勾股定理 $AD=\sqrt{CD^2-AC^2}=\sqrt{3}\cdot$ 又$A=\frac{2\pi}{3}$, 则$\angle DAB=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$, $S=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

19. (本题满分 12 分)

记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n>0, a_2=3a_1$, 且数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 是等差数列. 证明：$\{a_n\}$ 是等差数列.

【答案解析：】$\because$ 数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 是等差数列, 设公差为$d=\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_2+a_1}-\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$, $\therefore\ \sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}+(n-1)\sqrt{a_1}=n\sqrt{a_1}\,(n\in\mathrm{N}^*)$,, $\therefore\ S_n=a_1n^2\,(n\in\mathrm{N}^*)$ $\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=a_1n^2-a_1(n-1)^2=2a_1n-a_1$, 当 $n=1$ 时, $2a_1\times 1-a_1=a_1$, 满足 $a_n=2a_1n-a_1$,$\therefore$ $a_n=2a_1n-a_1\,(n\in\mathrm{N}^*)$, $\therefore a_n-a_{n-1}=(2a_1n-a_1)-[2a_1(n-1)-a_1]=2a_1$, $\therefore\{a_n\}$ 是等差数列.

20. (本题满分 12 分, 第小题 6 分)

已知数列 a_n 满足 $a_1=0, a_{n+1}+a_n=2n$, 求 a_n 的通项公式.

【答案解析：】由题意, $a_2=2$. 由

$$a_{n+1}+a_n=2n$$
$$a_n+a_{n-1}=2(n-1)(n\geq 2)$$

两式作差得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2(n\geq 2)$, 所以 $a_1,a_3,a_5,\cdots$, 构成以 a_1 为首项，以 2 为公差的等差数列, 且

$$a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times 2=2k-1\,(k\in N^*);$$

$a_2,a_4,a_6,\cdots$, 构成以 a_2 为首项，以 2 为公差的等差数列, 且

$$a_{2k}=a_2+(k-1)\times 2=2k\,(k\in N^*),$$

因此

$$a_n=\begin{cases} n-1(n\text{ 为奇数}) \\ n(n\text{ 为偶数}) \end{cases}$$

21. (本题满分 12 分，第一小题满分 5 分，第二小题满 7 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n，且 S_1,S_2,S_4 成等比数列

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n=(-1)^{n-1}\frac{4n}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

【答案解析：】由于 S_1,S_2,S_4 成等比数列, 所以 $S_1S_4=S_2^2$, 即

$$a_1(4a_1+6d)=(2a_1+d)^2$$

代入 $d=2$, 解得: $a_1=1$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.

根据第一问的结论, 我们有:

$$b_n=(-1)^{n-1}\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right]$$

因此:

$$\begin{aligned}T_n&=b_1+b_2+\cdots+b_n\\&=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right]\\&=1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\end{aligned}$$

(二) 选考题：共 12 分，请考生在第 22 ~ 23 中任选一道题作答，如果考生多做，则按给出解答的第一题计分.

22. (本题满分 12 分，第一小题满分 5 分，第二小题满 7 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=-\frac{9}{4}$, 且 $4S_{n+1}=3S_n-9\,(n\in\mathrm{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $3b_n+(n-4)a_n=0\,(n\in\mathrm{N}^*)$, 记 b_n 的前 n 项和为 T_n. 若 $T_n\le\lambda b_n$ 对任意 $n\in\mathrm{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

【答案解析：】【答案】(1) $a_n=-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$; (2) $-3\le\lambda\le 1$

【详解】(1) 当 $n=1$ 时, $4(a_1+a_2)=3a_1-9, 4a_2=\frac{9}{4}-9=-\frac{27}{4}, \therefore a_2=-\frac{27}{16}$;

当 $n\ge 2$ 时, 由 $4S_{n+1}=3S_n-9$ (1), 得 $4S_n=3S_{n-1}-9$ (2), (1) - (2) 得 $4a_{n+1}=3a_n$, $a_2=-\frac{27}{16}\ne 0$, $\therefore a_n\ne 0$, $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}$, 又 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{4}$, $\therefore \{a_n\}$ 是首项为 $-\frac{9}{4}$, 公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列, $\therefore a_n=-\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$;

(2) 由 $3b_n+(n-4)a_n=0$, 得 $b_n=-\frac{n-4}{3}a_n=(n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\therefore T_n=-3\times\frac{3}{4}-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+0\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$\frac{3}{4}T_n=-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-5)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

两式相减得

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}T_n&=-3\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots\left(\frac{3}{4}\right)^n-(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\\&=-\frac{9}{4}+\frac{\frac{9}{16}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{3}{4}}-(n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\\&=-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\\&\therefore T_n=-4n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

由 $T_n\le\lambda b_n$ 得 $-4n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\le\lambda(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 恒成立, 即 $\lambda(n-4)+3n\ge0$ 恒成立, $n=4$ 时不等式恒成立; 当 $n<4$ 时, $\lambda\le-\frac{3n}{n-4}=-3-\frac{12}{n-4}$, 得 $\lambda\le1$; 当 $n>4$ 时, $\lambda\ge-\frac{3n}{n-4}=-3-\frac{12}{n-4}$, 得 $\lambda\ge-3$; $\therefore -3\le\lambda\le1$

23. (本题满分 12 分, 第小题 6 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1,b_1=0,4a_{n+1}=3a_n-b_n+4,4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

(1) 证明:$\{a_n+b_n\}$ 是等比数列,$\{a_n-b_n\}$ 是等差数列.

(2) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

【答案解析:】**解** (1). 由题目给定的已知条件: 联立 $\begin{cases}4a_{n+1}=3a_n-b_n+4 & ①\\4b_{n+1}=3b_n-a_n-4 & ②\end{cases}$, 由 ①+② 得到 $4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$, 得到 : $\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_n+b_n}=\frac{1}{2}(n\ge1)$ 又由题给条件 $\begin{cases}a_1=1;\\b_1=0.\end{cases}$ 故可得到; 数列 $\{a_n+b_n\}$ 是以 $(a_1+b_1=1$ 为首项 $q=\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列; 且通项公式为: $a_n+b_n=(a_1+b_1)q^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 再由 ①, ② 得到 $4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$, 于是我们可得:

$$(a_{n+1}-b_{n+1})-(a_n-b_n)=2(n\ge1)$$

由 $a_1-b_1=1$ 知; 数列 $\{a_n-b_n\}$ 是以 $a_1-b_1=1$ 为首项 $d=2$ 为公差的等差数列; 且通项公式为: $a_n-b_n=(a_1-b_1)+(n-1)d=2n-1$

解 (2). 由 (1) 我们得到 $\begin{cases}a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & ③\\a_n-b_n=2n-1 & ④\end{cases}$, 由③+④ 得到:

$$a_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2n-1\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n-\frac{1}{2}$$

由 ③-④ 得到:

$$b_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2n+1\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^n-n+\frac{1}{2}$$