高等代数答案

沧笙踏歌

1. 下列多项式在有理数域上不可约的是.

A. x^5+1; B. x^3-5x^2+4x+4; C. x^5-2x+1; D. x^5+3x+1.

解: 本题 A,B,C 三个选项均可使用 **Bezout 定理**: 在数域 P 上的一元多项式环 $P[x]$ 中,$x-a$ 是 $f(x)$ 的一次因式当且仅当 a 是 $f(x)$ 在数域 P 中的一个根.

A 选项, 因为 $(-1)^5+1=0$, 所以由 Bezout 定理可知 $(x+1)|(x^5+1)$;

B 选项,x^3-5x^2+4x+4 的有理根可能为 $\pm1,\pm2,\pm4$, 因为 $2^3-5\times2^2+4\times2+4=0$, 所以由 Bezout 定理可知 $(x-2)|(x^5+1)$;

C 选项,x^5-2x+1 的有理根可能为 ±1, 因为 $1^5-2\times1+1=0$, 所以由 Bezout 定理可知 $(x-1)|(x^5-2x+1)$;

D 选项,x^5+3x+1 的有理根可能为 ±1, 由于 $(\pm1)^5+3\times(\pm1)+1\neq0$,$1^5+3\times1+1\neq0$, 因此根据 Bezout 定理可知 x^5+3x+1 没有一次因式, 于是, 若 x^5+3x+1 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则由整系数多项式在 $\mathbb{Q}$ 上可约的充要条件 (一个次数大于 0 的整系数多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约当且仅当 $f(x)$ 能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积) 可知

$$\begin{aligned}x^5+3x+1&=(x^2+ax+1)(x^3+bx^2+cx+1)\\&=x^5+(a+b)x^4+(c+ab+1)x^3+(1+ac+b)x^2+(a+c)x+1;\end{aligned}$$

其中 $a,b,c\in\mathbb{Z}$. 由多项式相等的定义

$$\begin{cases}a+b=0, & (1)\\ c+ab+1=0, & (2)\\ 1+ac+b=0, & (3)\\ a+c=3, & (4)\end{cases}$$

由(1)式可知 $b=-a$, 由(4)式可知 $c=3-a$, 代入(2)式和(3)式得 ■